1 Комплексные числа.

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а i — символ, который называется *мнимой единицей* ($i^2 = -1$). Числа x и y называются, соответственно, *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа z и обозначаются символами $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. Если, в частности, $y = 0$, то $x + i0$ считается совпадающим с действительным числом x; если $x = 0$, то $0 + iy$ обозначается просто iy и называется *чисто мнимым*.

Определим на множестве комплексных чисел понятие равенства и простейшие операции. Будем говорить, что комплексные числа $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$ равны, тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Суммой $z_1 + z_2$ комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = z_1 + z_2 = (x_l + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Сложение допускает обратную операцию. Это число называется *разностью* чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ и обозначается символом $z_1 - z_2$. Очевидно,

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ сопоставляется *сопряженное* к нему число $\bar{z} = x - iy$.

Легко видеть, что произведение комплексного числа $z = x + iy$ на сопряженное с ним всегда неотрицательно. В самом деле

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 > 0.$$

Умножение также допускает обратную операцию, если только данный множитель не равен нулю ($z_2 \neq 0$). Это число z называется частным двух чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ и обозначается символом $\dfrac{z_1}{z_2}$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

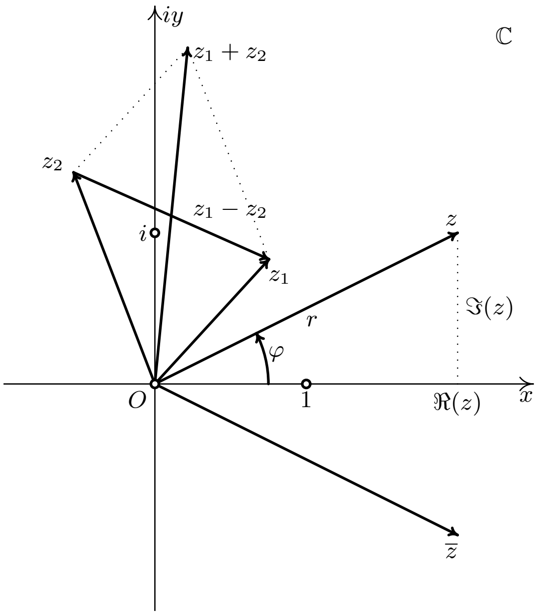
2 Геометрическая интерпретация комплексного числа

Пусть на плоскости задана декартова система координат Oxy. Условимся изображать комплексное число $z = x + iy$ точкой с координатами (x, y), и эту точку обозначать той же буквой z. При этом действительные числа будут изображаться точками оси x (которую в дальнейшем мы будем называть *действительной осью*), чисто мнимые — точками оси y (называемой *мнимой осью*). В частности, изображением числа i будет служить точка $(0, 1)$ мнимой оси.

Легко видеть, что и обратно, каждой точке плоскости Oxy с координатами (x, y) будет таким способом поставлено в соответствие вполне определенное комплексное число $z = x + iy$, так что это соответствие между множеством всех комплексных чисел и всех точек плоскости взаимно однозначно.

Далее, каждой точке (x, y) соответствует вполне определенный вектор — радиус-вектор этой точки, а каждому радиусу- вектору, лежащему в плоскости, — вполне определенная точка — его конец. Поэтому мы будем в дальнейшем представлять комплексные числа также в виде радиусов векторов на плоскости.

Из рис. ясен геометрический смысл операций сложения и вычитания комплексных чисел: сумма и разность комплексных чисел z_1 и z_2 изображаются соответственно векторами, равными направленным диагоналям параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2.



3 Тригонометрическая форма комплексного числа

Положение точки $z = x+iy$ на комплексной плоскости однозначно определяется не только декартовыми координатами x, y, но и полярными координатами r, φ, связанными с декартовыми координатами формулами перехода

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Тогда, если $z \neq 0$, то

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где положительное число $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x+iy$, а в качестве φ можно взять угол, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, между действительной осью и вектором z. Этот угол называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\arg z$.

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел удобна при выполнении операции умножения комплексных чисел. В самом деле, если

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) =$$
$$r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Формула для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай n сомножителей. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Если $r = 1$, то вытекает *формула Муавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Перейдем к извлечению корня данной степени из комплексного числа. Число w называется корнем степени n из числа z (обозначается $\sqrt[n]{z}$), если $w^n = z$.

Если $z = 0$, то при любом n уравнение $w^n = z$ имеет одно и только одно решение $w = 0$. Если $z \neq 0$, то и $w \neq 0$, а следовательно, и z и w можно представить в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Уравнение $w^n = z$ примет вид

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на $2\pi k$, где k — некоторое целое число. Следовательно,

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k$$

или

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}.$$

Итак, все решения уравнения $w^n = z$ могут быть записаны следующим образом

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right).$$

Легко видеть, что все числа w_k, получаемые при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, различны. Если брать значения $k \geqslant n$, то других комплексных чисел, отличных от $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ не получится.

4 Предел последовательности комплексных чисел

Одним из фундаментальных понятий анализа является понятие предела и, в частности, понятие сходящейся числовой последовательности. Аналогичную роль играют соответствующие понятия и в области комплексных чисел. При этом многие определения, связанные с предельным переходом, полностью повторяют соответствующие определения теории функций действительной переменной.

Последовательностью $\{z_n\}$ точек метрического пространства $\mathbb{C}$ называется отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Будем говорить, что последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел сходится к числу $z \in \mathbb{C}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$.

Последовательность $\{z_n\}$, имеющая предел z, называется сходящейся к числу z, что записывается в виде $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Для геометрической интерпретации предельного перехода в комплексной области удобным оказывается понятие ε-окрестности точки комплексной плоскости.

ε-окрестность числа $z_0 \in \mathbb{C}$ называется множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ – это круг (без граничной окружности) радиуса ε с центром в точке (x_0, y_0) если $z_0 = x_0 + iy_0$.

Из этого определения следует, что точка z является пределом сходящейся последовательности $\{z_n\}$, если в любой ε-окрестности точки z лежат все элементы этой последовательности, начиная с некоторого номера, зависящего от ε.

Поскольку каждое комплексное число $z_n = a_n + ib_n$ характеризуется парой действительных чисел a_n и b_n, то последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, составленные соответственно из действительных и мнимых частей элементов z_n последовательности $\{z_n\}$.

Из неравенств

$$\max\{|a_n - a|, |b_n - b|\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$$

видно, что последовательность комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда сходятся последовательности действительных и мнимых частей членов этой последовательности.

5 Функции комплексного переменного

В этом параграфе мы введем понятие функции комплексной переменной. Это понятие вводится так же как и понятие функции действительной переменной.

Говорят, что на множестве E точек плоскости z задана *функция* $w = f(z)$, если указан закон, по которому каждой точке z из E ставится в соответствие определенная точка или совокупность точек w. В первом случае функция $f(z)$ называется *однозначной*, во втором – *многозначной*.

Множество E будем называть множеством значений независимой переменной. Структура этого множества может быть весьма сложной и разнообразной, однако в теории функций комплексной переменной рассматривают множества специальной структуры.

Множество D на комплексной плоскости называют областью, если выполняются следующие условия: вместе с каждой точкой из D этому множеству принадлежит окрестность этой точке (свойство открытости); любые две точки D можно соединить ломаной, состоящей из точек D (свойство связности).

Граничной точкой области D называется точка, в любой окрестности которой есть точки, принадлежащие D, и точки, не принадлежащие D. Множество граничных точек области называется границей этой области.

Если положить $z = x+iy$ и $w = u+iv$, то задание функции комплексного переменного $w = f(z)$ будет равносильным заданию двух функций двух действительных переменных:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Функция $u(x, y)$ называется действительной, а функция $v(x, y)$ – мнимой частью функции $w = f(z)$.

Условимся откладывать значения z на одной комплексной плоскости, а значения w – на другой. Тогда функцию комплексного переменного можно геометрически представлять как некоторое отображение множества M плоскости z на множество N плоскости w.

Пример. Рассмотрим $\mathbb{C}$-значную функцию $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, как отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сопоставляя каждой точке $z = x + iy$ точку $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$. Таким образом $f(z) = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2xyi$ и $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

Пусть функция $f(z)$ определена и однозначна в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$, кроме, быть может, самой точки z_0.

Мы будем говорить, что существует предел функции $f(z)$ при $z \to z_0$ (обозначение: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$): если существуют пределы $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x, y) = u_0$ и

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0$; при этом мы будем полагать

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = u_0 + iv_0 = w_0.$$

Так как наше определение сводится к обычному определению предела действительных функций, то основные свойства предельного перехода сохраняются для функций комплексного переменного.

Определение предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ можно сформулировать также с помощью понятия окрестности:

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\ :\forall z\, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Функция $f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0, если она определена в некоторой окрестности z_0 (включая саму точку z_0) и

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функция $f(z)$ называется непрерывной в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

6 Дифференцируемые функции. Условие Коши–Римана

Определение 1. Функции $f(z)$ *дифференцируема* в точке z если приращение $f(z+\Delta z) - f(z)$ функции представляется в виде

$$f(z+\Delta z) - f(z) = A\Delta z + o(|\Delta z|) \quad \text{при} \quad \Delta z \to 0,$$

где A – комплексная постоянная, не зависящая от Δz.

Определение 2. *Производной функции* $f(z)$ в точке z называется

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

если этот предел существует.

Пример. Функция $f(z) = z^2$ дифференцируема во всей комплексной плоскости, так как

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

Следовательно, $(z^2)' = 2z$.

Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке некоторой области D, называется *аналитической* в этой области. Подчеркнем, что наше определение аналитической функции предполагает ее однозначность в области D, ибо понятие предела и производной определены выше лишь для однозначных функций.

Рассмотрим другой

Пример. Пусть функция $f(z) = z\bar{z}$. Тогда,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)\overline{(z+\Delta z)} - z\bar{z}}{\Delta z} = \\ = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{\Delta z} + \bar{z}\Delta z + \Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\bar{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)$$

Положим, что предел существует.

Выбирая $\Delta z = \Delta x + 0i$, находим

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left(\bar{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\bar{z} + \Delta x + z\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = \bar{z} + z,$$

а полагая $\Delta z = 0 + \Delta y i$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left(\bar{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\bar{z} - i\Delta y - z\frac{i\Delta y}{i\Delta y}\right) = \bar{z} - z.$$

Тогда должно иметь место следующие равенство $\bar{z} + z = \bar{z} - z$. Таким образом, функция дифференцируема в смысле $\mathbb{C}$ в точке $z = 0$, но не аналитична в этой точке.

Требование дифференцируемости функции комплексной переменной в точке z накладывает весьма важные условия на поведение действительной и мнимой частей этой функции в окрестности точки z. Эти условия известны под названием условий Коши—Римана, которые могут быть сформулированы в виде.

Теорема 1 (условия Коши—Римана). *Пусть функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки z, причем в этой точке функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы. Тогда для дифференцируемости функции комплексного переменного $f(z)$ в точке z необходимо и достаточно, чтобы в этой точке имели место соотношения:*

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть существует

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

Воспользуемся замечанием о независимости предела от способа приближения к точке z. Предположим сначала, что Δz приближается к нулю по прямой, параллельной действительной оси, т. е. что $\Delta z = \Delta x \to 0$. Тогда, получим:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}.$$

Из существования предела комплексного выражения следует существование пределов его действительной и мнимой частей. Поэтому в точке x, y существуют частные производные по x функций и $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеет место формула

$$f'(z) = u_x + iv_x.$$

Найдем теперь тот же предел в предположении, что $\Delta z = i\Delta y$ и $\Delta y \to 0$.

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} =$$
$$= -iu_y + v_y.$$

Сравнивая две последние формулы, убеждаемся в справедливости соотношений (1).

Достаточность. По определению дифференциала функций двух действительных переменных имеют место равенства:

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(|\Delta z|),$$
$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(|\Delta z|),$$

где $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$. Тогда приращение функции $f(z)$ принимает вид:

$$f(z+\Delta z) - f(z) = u_x \Delta x + u_y \Delta y + i(v_x \Delta x + v_y \Delta y) + o(|\Delta z|),$$

где $\alpha + i\beta$. Используя равенства (1), это приращение можно переписать в виде

$$f(z+\Delta z) - f(z) = (u_x + iv_x)(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|) = A\Delta z + o(|\Delta z|),$$

где $A = u_x + iv_x$ – вполне определенное число, не зависящее от Δz, т. е. функция $f(z)$ дифференцируема в точке z и $A = f'(z)$. □

С учетом условий Коши – Римана производную функции $f(z)$ можно представить в следующих равносильных формах:

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x. \tag{2}$$

7 Элементарные функции

Показательную функцию e^z мы определим для любого комплексного $z = x + iy$ соотношением

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{3}$$

Для действительных $z = x$ наше определение совпадает с обычным. Следует непосредственно из формулы (3), если положить в ней $y = 0$.

Определенная нами функция всюду аналитична. Для этого проверим выполнение условий Коши — Римана

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x.$$

Проводя вычисление производной e^z по формулам (2), получаем

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Таким образом, сохраняется обычная формула дифференцирования $(e^z)' = e^z$ю

Сохраняется основное свойство показательной функции: $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. Положим $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, тогда

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos(y_1) + i\sin(y_1))e^{x_2}(\cos(y_2) + i\sin(y_2)) =$$
$$e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) = e^{z_1+z_2}.$$

Полагая в соотношении (3) $x = 0$, $y = \varphi$, получим классическую *формулу Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

С помощью формулы Эйлера любое комплексное число z с модулем r и аргументом φ можно записать в следующей *показательной форме*:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Наряду со свойствами, которые справедливы и в действительной и в комплексной областях, показательная функция комплексного переменного обладает и специфическим свойством: она оказывается периодической с чисто мнимым основ- основным периодом $2\pi i$ В самом деле, для любого целого числа k имеем:

$$e^{z+2\pi ki} = e^z e^{2\pi ki} = e^z,$$

ибо по формуле Эйлера $e^{2\pi ki} = 1$.

Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной: число w называется логарифмом числа z, если $e^w = z$(обозначение: $\ln z$).

Из определения вытекает основное свойство логарифмов:

$$\ln(z_1z_2) = \ln z_1 + \ln z_2.$$

В самом деле, если $w_1 = \ln z_1$ и $w_2 = \ln z_2$ имеем: $z_1 = e^{w_1}$, $z_2 = e^{w_2}$, следовательно $z_1 z_2 = e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1 + w_2}$ и $w_1 + w_2 = \ln(z_1 z_2)$.

В частности, полагая $z_1 = |z|$, $z_2 = e^{i \arg z}$, получим:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

В формуле символ $\arg z$ может обозначать любое значение аргумента z; поэтому каждое комплексное число, $z \neq 0$ имеет бесчисленное множество логарифмов.

Тригонометрические функции в комплексной области просто выражаются через показательную функцию. Для действительного переменного x формула Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

откуда

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Учитывая это, примем *по определению* и для любого комплексного z

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Все свойства этих функций вытекают из этого определения и соответствующих свойств показательной функции. Так, обе они периодические с основным периодом 2π, косинус — четная, а синус — нечетная функция. Для этих функций сохраняются обычные формулы дифференцирования $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$. Сохраняются также тригонометрические соотношения, такие, как $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\cos z = \sin\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right)$ теоремы сложения и т. д.

8 Понятие интеграла по комплексному переменному.

Если $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — комплекснозначная функция действительного переменного, то интеграл от функции $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ определяется формулой

$$\int_\alpha^\beta \gamma(t)\,dt = \int_\alpha^\beta x(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta y(t)\,dt.$$

Пример.

$$\int_0^1 t^2 + it^3\,dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}i.$$

Комплекснозначная функция $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, отображает отрезок $[\alpha, \beta]$ на некоторое множество точек комплексной плоскости, которое, в частности, если функция непрерывна, является некоторой кривой на комплексной плоскости.

Определение 3. Путем γ мы будем называть непрерывное отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ действительной оси в $\mathbb{C}$.

Путь $\gamma(t)$ называется *непрерывно дифференцируемым*, если в каждой точке t существует непрерывная производная $\gamma'(t)$ (под производной функции $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ в точке t понимается $x'(t) + iy'(t)$) Непрерывно дифференцируемый путь называется *гладким*, если $\gamma'(t) \neq 0$ при всех t.

Пусть a и b — концы гладкий кривой γ, определенной уравнением $z = \gamma(t)$. Предположим, что при изменении t от значения a до значения b точка z перемещается вдоль кривой от a к b.

Пусть $f(z)$ — комплексная функция от z, непрерывная вдоль γ. Пусть $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — точки на γ, причем z_0 есть a, а z_n есть b. Обозначим $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ и составим сумму

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(z_i - z_{i-1}),$$

где ζ_i — точка кривой, лежащая между z_{i-1} и z_i.

По *определению* интегралом от $f(z)$ вдоль γ называют

$$\lim_{\max|\Delta z_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(z_i - z_{i-1}) = \int_\gamma f(z)\,dz,$$

не зависящий ни от способа разбиения кривой γ, ни от выбора точек ζ_i.

Что касается фактического вычисления интеграла по комплексному переменному, то, предполагая уравнение линии γ в виде $z = \gamma(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, имеем:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(z_i - z_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(\tau_i))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})),$$

где $\zeta_i = \gamma(\tau_i)$, $t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i$. Последнее выражение преобразуем следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(\tau_i))\frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}(t_i - t_{i-1}).$$

Отсюда следует, что при $\max|t_i - t_{i-1}| \to 0$ существует предел, а следовательно

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Пример. Пусть γ – окружность $z = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, и $f(z) = (z-a)^n$, где $n = 0, \pm 1, \ldots$ – произвольное целое число. По определению

$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt;$$

при $n \neq -1$ имеем

$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz = r^{n+1} i \left(\int_0^{2\pi} \cos(n+1)t\,dt + i\int_0^{2\pi} \sin(n+1)t\,dt\right) = 0,$$

а при $n = -1$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Таким образом,

$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{при } n = -1. \end{cases}$$

Перечислим основные свойства интеграла от комплексных функций.

Линейность. Если f и g непрерывны на пути $\gamma \in C^1$, то для любых комплексных постоянных a и b

$$\int_\gamma (af(z) + bg(z))\, dz = a\int_\gamma f(z)\, dz + b\int_\gamma g(z)\, dz.$$

Аддитивность. Пусть даны два пути $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1$, определенные соответственно функциями $\gamma_1(t)$, $t \in [\alpha, \beta_1]$, и $\gamma_2(t)$, $t \in [\alpha_2, \beta]$, причем $\beta_1 = \alpha_2$ и $\gamma(\beta_1) = \gamma(\alpha_2)$.

Объединением $\gamma_1 \cup \gamma_2$ этих путей назовем кусочно непрерывно дифференцируемый путь γ, определяемый функцией

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{если } t \in [\alpha, \beta_1], \\ \gamma_2(t) & \text{если } t \in [\alpha_2, \beta]. \end{cases}$$

Пусть на γ задана непрерывная функция f, тогда

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} (z)\, dz.$$

Ориентированность. Обозначим через γ^- путь, который получается из пути γ: $\gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, класса C^1, заменой переменных $\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, и пусть f – функция, непрерывная на γ; тогда

$$\int_{\gamma^-} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz.$$

Оценка интеграла. Для любой функции f, непрерывной на гладком пути γ: $\gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, справедливо неравенство

$$\left|\int_\gamma f(z)\, dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\, dt \leqslant M\int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\, dt = Ml,$$

где $M = \max|f(z)|$ на пути γ и l – длина γ.

Пусть в области D задана функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и γ − произвольный гладкий путь, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, лежащий в D. Тогда, если функцию f дифференцируема в каждой точке пути, то

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dy}{dt} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{dt}\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right) = f'(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Пусть $F\colon D \to \mathbb{C}$ − первообразная функции f, $F'(z) = f(z)$ в D; γ − произвольный гладкий путь в D. Тогда,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Так как $\dfrac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$, то

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt =$$
$$= F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad (4)$$

Пусть функция f непрерывна и интеграл от f между двумя точками области не зависит от пути. Тогда функция

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s)\,ds,$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку $[z_0, z] \subset D$, является первообразной.

Фиксируем произвольную точку $z \in D$ и будем считать Δz столь малым, что точка $z + \Delta z$. Далее, имеем

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} (f(s) - f(z) + f(z))\,ds =$$
$$= f(z)\int_z^{z+\Delta z} ds + \int_z^{z+\Delta z} (f(s) - f(z))\,ds$$

Последнюю формулу можно переписать в следующем виде:

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)+\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}(f(s)-f(z))\,ds.$$

$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}(f(s)-f(z))\,ds\right|\leqslant\frac{1}{|\Delta z|}\max|f(s)-f(z)||\Delta z|=$$
$$=\max|f(s)-f(z)|.$$

Нам надо взять максимум модуля разности $|f(s)-f(z)|$ при изменении s вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего z и $z+\Delta z$. Непрерывная неотрицательная функция $|f(s)-f(z)|$ от s принимает на упомянутом отрезке наибольшее значение в некоторой точке $s=s_0$ т. е. $\max|f(s)-f(z)|=|f(s_0)-f(z)|$. Но при $\Delta z\to 0$ точка s_0 принадлежащая упомянутому отрезку, стремится к z, и в силу непрерывности $f(z)$ разность $|f(s_0)-f(z)|\to 0$, откуда и следует, что последнее слагаемое справа в выражении стремится к нулю, т. е. $F'(z)=f(z)$.

9 Теорема Коши о гомотопии.

Непрерывную деформацию кривой можно представить наглядно геометрически.

Аналитическое определение вводится следующим образом

Определение 4. Два пути $\gamma_1\colon[0,1]\to D$ и $\gamma_2\colon[0,1]\to D$ с общими концами a и b называются *гомотопными* ($\gamma_1\sim\gamma_2$) в области D, если существует непрерывное отображение $\Gamma(t,s)\colon[0,1]\times[0,1]\to D$ такое, что

$$\Gamma(t,0)=\gamma_1(t)\quad\Gamma(t,1)=\gamma_2(t)$$

и для любого s функция $\Gamma(t,s)$ описывает замкнутую кривую в D

$$\Gamma(0,s)=a,\quad\Gamma(1,s)=b.$$

Приведем также вариант определения для случая замкнутых путей.

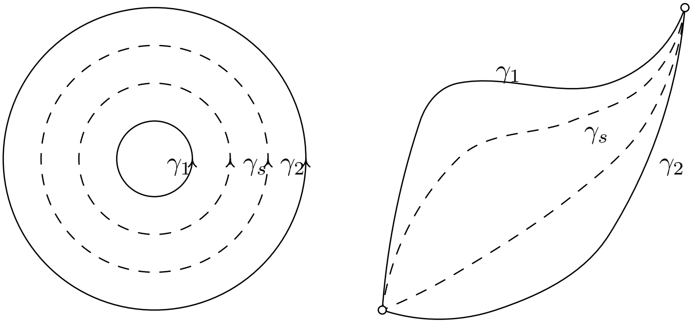
Определение 5. Два пути $\gamma_1\colon [0,1] \to D$ и $\gamma_2\colon [0,1] \to D$ называются *гомотопными* ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) в области D, если существует непрерывное отображение $\Gamma(t,s)\colon [0,1] \times [0,1] \to D$ такое, что

$$\Gamma(t,0) = \gamma_1(t) \quad \Gamma(t,1) = \gamma_2(t)$$

и для любого s функция $G(t,s)$ описывает замкнутую кривую в D

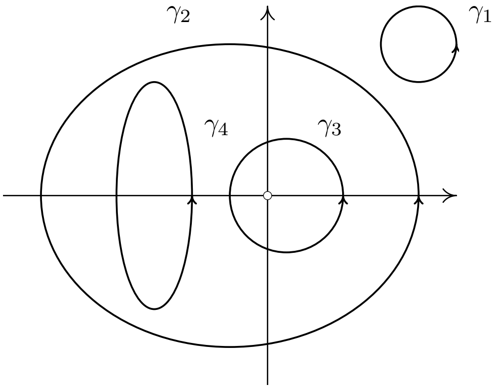
$$\Gamma(0,s) = \Gamma(1,s).$$

Отображение H называют *гомотопией, связывающей* γ_1 и γ_2.



Пример. Пусть область $D = \{z \mid 1 < |z| < 5\}$ и окружности $\gamma_1(t) = 2e^{i2\pi t}$, $t \in [0,1]$ и $\gamma_2(t) = 4e^{i2\pi t}$, $t \in [0,1]$. Тогда $H(t,s) = (2+2s)e^{i2\pi t}$ – гомотопия в D связывающая γ_1 и γ_2. Далее, пусть γ_3 та же окружность γ_2, но ориентированная в противоположную сторону – $\gamma_3(t) = 4e^{-i2\pi t}$, $t \in [0,1]$. Тогда $\gamma_1 \not\sim \gamma_3$.

Пример. Пусть область D комплексная плоскость с выколотой точкой $z = 0$. Тогда $\gamma_2 \sim \gamma_3$, $\gamma_1 \sim \gamma_4$, но $\gamma_3 \not\sim \gamma_4$.



Для нас особый интерес представляют замкнутые пути, *гомотопные нулю*, т. е. эквивалентные $\gamma\colon [0,1] \to z_0 \in D$.

Определение 6. Область D называется *односвязанной*, если любой замкнутый путь в D гомотопен нулю.

Пример. Единичный круг $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ односвязан: любой замкнутый путь $\gamma\colon [0,1] \to D$ стягивается в точку гомотопией $H(t,s) = (1-s)\gamma(t)$. Напротив кольцо $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ неодносвязано.

Теорема 2 (Коши о гомотопии)**.** *Если функция $f(z)$ аналитична в области D и пути γ_0 и γ_1 гомотопны в D, то*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

Доказательство. Пусть Γ гомотопия, связывающая γ_0 и γ_1. Для каждого s, функция γ_s описывает замкнутый путь в D.

Рассмотрим интеграл

$$I(s) = \int_{\gamma_s} f(z)\,dz = \int_0^1 f(\Gamma(t,s))\frac{\partial\Gamma(t,s)}{\partial t}\,dt.$$

Предполагая, что можно менять местами операцию дифференцирования и интегрирования, найдем производную $I(s)$ по s.

$$\begin{aligned}
I'(s) &= \frac{d}{ds}\left(\int_0^1 f(\Gamma(t,s))\frac{\partial\Gamma(t,s)}{\partial t}\,dt\right) = \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left(f(\Gamma(t,s))\frac{\partial\Gamma(t,s)}{\partial t}\right)dt = \\
&= \int_0^1 \left(f'(\Gamma(t,s))\frac{\partial\Gamma(t,s)}{\partial s}\frac{\partial\Gamma(t,s)}{\partial t} + f(\Gamma(t,s))\frac{\partial^2\Gamma(t,s)}{\partial s\partial t}\right)dt = \\
&= \int_0^1 \left(f'(\Gamma(t,s))\frac{\partial\Gamma(t,s)}{\partial s}\frac{\partial\Gamma(t,s)}{\partial t} + f(\Gamma(t,s))\frac{\partial^2\Gamma(t,s)}{\partial t\partial s}\right)dt = \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(f(\Gamma(t,s))\frac{\partial\Gamma(t,s)}{\partial s}\right)dt = \\
&= f(\Gamma(1,s))\frac{\partial\Gamma(1,s)}{\partial s} - f(\Gamma(0,s))\frac{\partial\Gamma(0,s)}{\partial s}.
\end{aligned}$$

Поскольку, $\Gamma(0,s) = \Gamma(1,s)$ для любых s, тогда

$$I'(s) = f(\Gamma(1,s))\frac{\partial\Gamma(1,s)}{\partial s} - f(\Gamma(0,s))\frac{\partial\Gamma(0,s)}{\partial s} = 0,$$

т. е. $I(s)$ – постоянна. В частности, $I(0) = I(1)$. □

Следствие 1. *Если функция $f(z)$ аналитична в области D и путь γ гомотопен нулю в этой области, то*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Утверждения остаются в силе, когда кривая γ является границей области D.

Если функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в вплоть до ее границы, то ее интеграл вдоль границы этой области, проходимой так, что область D все время остается с одной стороны, равен нулю.

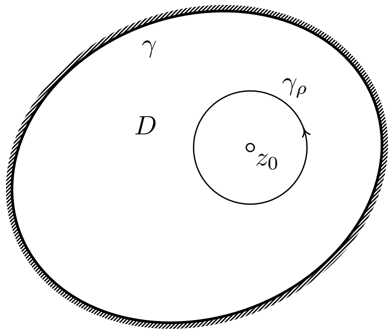
10 Формула Коши

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в вплоть до ее границы. Тогда для любой внутренней* *точки z_0 этой области имеет место* формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz,$$

где γ — граница области D, проходящая так, что область D остается все время слева.

Доказательство. Выбросим из области D кружок с центром z_0 и малым радиусом ρ, и пусть γ_ρ — окружность этого круга.



Функция $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ аналитична в области между γ и γ_ρ. Тогда, по теореме Коши, имеем

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Далее, поскольку $\displaystyle\int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$, то

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0) = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)\int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z-z_0}\,dz = \\ = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz. \qquad (5)$$

Оценим выражение

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\max_{\gamma_\rho}|f(z)-f(z_0)|\frac{2\pi\rho}{\rho} = \max_{\gamma_\rho}|f(z)-f(z_0)|.$$

Из оценки видно, что выражение при уменьшении ρ может быть сделана сколь угодно малой. С другой стороны, как видно из левой части (5), эта разность не зависит от ρ.

Следовательно, $\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0)\right| = 0.$ □

Отметим, что формула Коши позволяет вычислить значение функции в любой точке области, если известны граничные значения этой функции.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2-6z+5}\,dz,$$

где γ окружность $|z| = 4$.

Представим подынтегральную функцию следующим образом

$$\frac{\cos z}{z^2-6z+5} = \frac{\cos z}{(z-5)(z-1)} = \frac{f(z)}{(z-1)},$$

где $f(z) = \dfrac{\cos z}{z-5}$.

Поскольку функция $f(z)$ аналитична внутри области ограниченной окружностью γ, то

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2-6z+5}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)}\,dz = 2\pi i f(1) =$$
$$= 2\pi i\frac{\cos 1}{1-5} = -\frac{i\pi}{2}\cos 1.$$