19 Операционный метод и его приложения

Преобразование Лапласа ставит в соответствие комплексной функции $f(t)$ действительной переменной t функцию $F(p)$ комплексной переменной $p = s + i\sigma$ с помощью соотношения

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt. \tag{15}$$

Естественно, что не для всякой функции $f(t)$ этот интеграл имеет смысл. Поэтому мы начнем с определения класса функций $f(t)$, для которых данное преобразование заведомо реализуемо. Будем рассматривать функции $f(t)$, определенные для всех значений действительной переменной $-\infty < t < \infty$ и удовлетворяющие следующим условиям:

1. При $t < 0$ $f(t) \equiv 0$.
2. При $t \geqslant 0$ функция $f(t)$ на любом конечном участке оси t имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода.
3. При $t \to \infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т. е. для каждой функции рассматриваемого класса существуют такие положительные постоянные M и s, что для всех $t > 0$

$$|f(t)| \leqslant M e^{st}.$$

Точная нижняя грань тех значений s, для которых имеет место это неравенство, называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Если для функции $f(t)$ выполняется соотношение $|f(t)| \leqslant Me^{st}$, то $\dfrac{\ln|f(t)|}{t} \leqslant s + \dfrac{M}{t}$, откуда следует, что порядок роста определяется формулой $s_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln|f(t)|}{t}$.

Отметим, что для многочлена показатель роста равен 0, т. е. любая степенная функция растет медленнее показательной.

Функция $F(p)$, определенная через функцию $f(t)$ с помощью преобразования (15), называется *изображением Лапласа* функции $f(t)$. Функция $f(t)$ называется *оригиналом* функции $F(p)$. Связь функций $f(t)$ и $F(p)$ будем символически обозначать следующим образом:

$$f(t) \risingdotseq F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \risingdotseq f(t).$$

Далее мы всюду будем обозначать через $f(t)$, $g(t)$, $\ldots$ оригиналы и через $F(p)$, $G(p)$, $\ldots$ – их изображения:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt, \quad G(p) = \int_0^\infty g(t)e^{-pt}\,dt, \ldots$$

Заметим, что интеграл (15) является несобственным интегралом, зависящим от переменной p как от параметра. Очевидно, интеграл (15), вообще говоря, сходится не при всех значениях параметра p. Поэтому естественно поставить вопрос об области сходимости интеграла (15), а тем самым об области определения функции $F(p)$.

Кроме того, как мы видели, наиболее важным классом функций комплексной переменной являются аналитические функции. Выясним, является ли функция $F(p)$ аналитической.

Теорема 16. *Если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям, то ее изображение $F(p)$ определено для всех значений p, действительная часть которых превосходит показатель роста s функции $f(t)$, и является аналитической функцией при указанных значениях p.*

Изображение элементарных функций. Пользуясь определением (15), найдем изображение ряда элементарных функций действительной переменной.

Функция Хевисайда. Пусть

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad t < 0, \\ 1 & \text{если} \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\theta(t) \fallingdotseq F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}. \tag{16}$$

Показательная функция

$$f(t) = e^{\lambda t}.$$

Вычисляя интеграл (15), получаем:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}e^{\lambda t}\,dt = \frac{1}{p-\lambda},$$

$$e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{1}{p-\lambda}. \tag{17}$$

Непосредственно из свойств интегралов получаем:

Свойство линейности. Для любых (комплексных) постоянных α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p).$$

На основании этого свойства, например, сразу получаем соотношения

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}. \tag{18}$$

Аналогично,

$$\cos\omega t = \frac{p}{p^2+\omega^2}. \tag{19}$$

Дифференцирование оригинала. Если функция $f(t)$ непрерывна при $t > 0$ и $f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

где под $f^{(k)}(0)$ понимается правое предельное значение $\lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

В самом деле, переходя к изображениям и интегрируя по частям, получаем:

$$f'(t) \risingdotseq \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = \left(f(t)e^{-pt}\right)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt.$$

В силу того, что $\mathrm{Re}(p) = s > s_0$, где s_0 – показатель роста $f(t)$, имеем $|f(t)e^{-pt}| \leqslant Me^{(s-s_0)t}$ и подстановка $t = \infty$ дает нуль, подстановка же $t = 0$ дает, очевидно, $-f(0)$. Поэтому

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0). \tag{20}$$

В частности, если $f(0) = 0$, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p),$$

и дифференцирование оригинала сводится к умножению на p его изображения.

Применив формулу (20) дважды, получим:

$$f''(t) = (f'(t))' \risingdotseq p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

и т. д.

Дифференцирование изображения. Дифференцирование изображения сводится к умножению на $-t$ оригинала, или вообще

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t).$$

Производную аналитической функции $F(p)$ в области ее определения $\operatorname{Re} p > s_0$ можно вычислять, дифференцируя подынтегральную функцию в несобственном интеграле по параметру p. Проделав это, получим

$$F'(p) = -\int_0^\infty t f(t) e^{-pt}\, dt$$

Заметив, что умножение функции $f(t)$ на любую степенную функцию t^n не меняет ее степени роста.

Пример 14. В качестве примера применения свойства отметим, что из соотношений (16) и (17) вытекает:

$$t^{(n)} \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}},$$

а из формул (18), (19):

$$t \sin \omega t \risingdotseq \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}, \quad t \cos \omega t \risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Теорема смещения. Для любого комплексного λ

$$e^{\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p-\lambda)$$

(«смещение» изображения на λ равносильно умножению оригинала на $e^{\lambda t}$).

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, тогда, функция $e^{\lambda t} f(t)$, очевидно, удовлетворяет условиям существования изображения, которое определено в области $\operatorname{Re} p > s_0 + \operatorname{Re} \lambda$, и

$$e^{\lambda t} f(t) \risingdotseq \int_0^\infty f(t) e^{-(p-\lambda)t}\, dt = F(p-\lambda),$$

что и требовалось.

В заключение данного параграфа приведем таблицу изображений ряда элементарных функций.

Таблица оригиналов и их изображений

№ п/п.	Оригинал по Лапласу	Изображение
1	1	$\dfrac{1}{p}$
2	$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$
3	$e^{\lambda t}$	$\dfrac{1}{p-\lambda}$
4	$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
5	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6	$\dfrac{t^n}{n!}e^{\lambda t}$	$\dfrac{1}{(p-\lambda)^{n+1}}$
7	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
8	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
9	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
10	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$

20 Определение оригинала по изображению

В этом параграфе мы рассмотрим методы определения оригинала по заданному изображению, а также приведем некоторые достаточные условия, при которых заданная функция $F(p)$ комплексной переменной p является изображением функции $f(t)$ действительной переменной t.

Во-первых, отметим, что имеются различные таблицы изображений наиболее часто встречающихся в приложениях функций, так что при решении конкретных задач часто удается найти в соответствующем справочнике выражение оригинала для полученного изображения.

Во-вторых, приведенные в предыдущем параграфе свойства изображений во многих случаях позволяют решить и обратную задачу построения оригинала по заданному изображению.

Однако все эти методы, по существу, являются методами подбора. Основной целью данного параграфа является изложение общего метода построения оригинала по изображению.

Начнем с того случая, когда по условиям задачи известно, что заданная функция $F(p)$ комплексной переменной p является изображением непрерывной кусочно-гладкой функции $f(t)$ с органиченной степенью роста $|f(t)| < Me^{st}$, причем значение постоянной s задано. Требуется по заданной функции $F(p)$ построить искомую функцию $f(t)$. Эта задача решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 17. *Если функция $f(t)$ является оригиналом, а $F(p)$ служит ее изображением, то в любой точке t, где $f(t)$ непрерывна и имеет конечные односторонние производные то, справедливо равенство*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, \tag{21}$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p \geqslant s > s_0$ и понимается в смысле главного значения.

Интеграл в правой части формулы (21) называют *интегралом Меллина*.

Приведем еще условия, достаточные для того, чтобы заданная функция комплексного переменного $F(p)$ служила изображением некоторого оригинала.

Теорема 18. *Если функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + i\sigma$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$;*

2. *для всех $\operatorname{Re} p = s > s_0$ абсолютно сходится интеграл*

$$\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)\, dp.[1]$$

---

[1]Интеграл представляет собой несобственный интеграл первого рода по прямой $\operatorname{Re} p = s$ от действительной функции $|F(p)|$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(s+i\sigma)|\, d\sigma.$$

3. *стремится к нулю при* $|p| \to \infty$ *в любой полуплоскости* $\operatorname{Re} p \geqslant s > s_0$ *равномерно относительно* $\arg p$. [2]

Тогда $F(p)$ *является изображением функции*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, \quad \operatorname{Re} p \geqslant s > s_0.^3$$

Вместо условия 3 можно потребовать чтобы существовала последовательность радиусов $r_n \to \infty$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \max\{|F(p)| : |p| = r_n, \operatorname{Re} p \geqslant s > s_0\} = 0.$$

Во многих практически важных случаях интеграл, дающий выражение оригинала по заданной функции $F(p)$ комплексной переменной, может быть вычислен с помощью методов вычисления контурных интегралов от функции комплексной переменной.

Рассмотрим один частный случай, когда определение оригинала для заданной функции $F()$ комплексной переменной производится особенно просто.

Если функция $F(p) = \dfrac{P_n(p)}{P_m(p)}$, где $P_n(p)$, $P_m(p)$ –многочлены степени n и m соответственно, не имеющих общих нулей, и если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, то оригиналом ее служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(m_k - 1)!} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} (F(p) e^{pt} (p - p_k)^{m_k})|_{p=p_k},$$

где $p_1, \dots, p_l$ – нули многочлена $P_m(p)$, а m_k – их кратности и сумма берется по всем полюсам.

---

[2] $M(r) = \max\limits_{p\in\gamma_r} |F(p)| \to 0$ при $r \to \infty$,где γ_r – дуга окружности: $|p| = r$, $\operatorname{Re} p \geqslant s > s_0$.

[3] Несобственный интеграл вычисляется вдоль прямой $Rep = s$ и понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp = \lim_{A\to\infty} \int_{s-iA}^{s+iA} e^{pt} F(p)\, dp.$$

21 Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы.

Операционный метод особенно просто применяется к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Lx(t) = a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t) = f(t) \tag{22}$$

и начальные условия

$$x(0)=x_0, \quad x'(0)=x_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0)=x_{n-1}. \tag{23}$$

Будем считать, что функция $f(t)$ и решение $x(t)$ вместе с его производными до n-го порядка являются оригиналами; обозначим $X(p) \risingdotseq x(t)$, $F(p) \risingdotseq f(t)$.

По правилу дифференцирования и свойству линейности вместо дифференциального уравнения (22) с начальными данными (23) получаем *операторное уравнение*

$$\begin{aligned} &a_0(p^nX(p)-p^{n-1}x_0-p^{n-2}x_1-\ldots-px_{n-2}-x_{n-1})+\\ &\qquad a_1(p^{n-1}X(p)-p^{n-2}x_0-p^{n-3}x_1-\ldots-px_{n-3}-x_{n-2})+\ldots\\ &\qquad\qquad \ldots+a_{n-1}(pX(p)-x_0)+a_nX(p)=F(p) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)X(p)=F(p)+\\ &\qquad x_0(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\ldots+a_{n-1})+x_1(a_0p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-2})+\ldots\\ &\qquad\qquad \ldots+x_{n-2}(a_0p+a_1)+x_{n-1}a_0, \end{aligned}$$

или

$$A(p)X(p)=F(p)+B(p),$$

где $A(p)$ и $B(p)$ – известные многочлены. Решая это уравнение, найдем *операторное решение*:

$$X(p)=\frac{F(p)+B(p)}{A(p)}.$$

Если уравнение (22) при начальных данных (23) допускает решение $x(t)$, удовлетворяющее условиям, наложенным на оригиналы (а можно было бы доказать, что такое решение существует в принятых условиях всегда), то это решение является оригиналом $X(p)$. Оригинал, в общем случае, может быть найден по формуле Меллина:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} X(p)\, dp, \quad s > s_0,$$

где прямая $x = s_0$ проходит правее всех особых точек подынтегральной функции.

Пример 15. Решим задачу Коши для уравнения

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 6e^{-t}$$

с начальными условиями $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, тогда

$$\begin{aligned} &x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 2, \\ &x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 2p. \end{aligned}$$

Переходя к изображениям в уравнении, получаем

$$\begin{aligned} &p^2X(p) - 2p - 3(pX(p) - 2) + 2X(p) = \frac{6}{p+1}, \\ &X(p) = \frac{2p}{p^2 - 1}, \end{aligned}$$

откуда $x(t) = 2\cos it = e^{-t} + e^t$.

Особое место в операционном методе занимают предложения, выражающее связь между оригиналами и изображениями произведения функций.

Изображение свертки. Сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$ называется функция определенная соотношением:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau.$$

В справедливости последнего равенства легко убедиться, сделав в первом интеграле замену переменной интегрирования $t - \tau = \tau'$. Имеет место следующее

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$, то

$$(f * g)(t) \risingdotseq F(p)G(p).$$

Покажем, что $(f * g)(t)$ – оригинал. Сразу видно, что для функции $(f * g)(t)$ первое и второе из условий выполняются. Покажем, что третье условие также выполняется. В самом деле, поскольку функции $f(t)$ и $g(t)$ являются по условию оригиналами, то

$$|f(t)| \leqslant C_1 e^{s_1 t}, \quad |g(t)| \leqslant C_2 e^{s_2 t}.$$

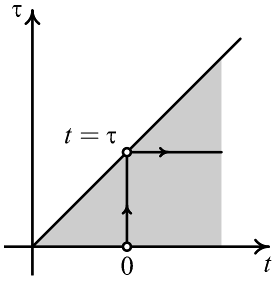
Пусть произведением постоянных величин C_1 и C_2 будет C и наибольшим из показателей роста s_1 и s_2 функций $f(t)$ и соответственно $g(t)$ будет s_2. Тогда

$$\left|\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right| \leqslant C\int_0^t e^{s_2\tau}e^{s_2(t-\tau)}\,d\tau = C\int_0^t e^{s_2 t}\,d\tau = Cte^{s_2 t}.$$

Фиксируем $\delta > 0$, найдем число M такое, что $Ct \leqslant Me^{\delta t}$ при $t \geqslant 0$. Следовательно, $|(f * g)(t)| \leqslant Me^{s_2+\delta t}$, т. е. $(f * g)(t)$ – оригинал.

Рассмотрим теперь изображение интеграла:

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right)dt.$$



Справа здесь стоит двукратный интеграл, распространенный на сектор плоскости (t,τ), ибо при фиксированном t интегрирование по τ ведется в пределах от 0 до $x = t$, а затем изменяется от 0 до ∞, Так как при $\operatorname{Re} p > s_0$ этот двукратный интеграл абсолютно сходится, то в нем можно изменить порядок интегрирования, и мы получим (заменяя еще t на $t' = t - \tau$)

$$\int_0^\infty f(\tau)\,d\tau\int_\tau^\infty e^{-pt}g(t-\tau)\,dt = \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau\int_0^\infty g(t')e^{-pt'}\,dt' = F(p)G(p).$$

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром K, зависящим только от разности аргументов, т. е. уравнение вида

$$f(t) = \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)\,d\tau + \varphi(t),$$

где φ – заданная, f – искомая функция. Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $K(t) \risingdotseq G(p)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$. Тогда из уравнение получаем $F(p) = G(p)F(p)+\Phi(p)$, откуда

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{1-G(p)}.$$

Оригинал для $F(p)$ есть искомое решение уравнения.

Пример 16. Решить интегральное уравнение

$$f(t) = \int_0^t (t-\tau) f(\tau)\, d\tau + \sin t.$$

Переходя к изображениям, получаем

$$F(p) = \frac{1}{p^2}F(p) + \frac{1}{p^2+1},$$

откуда

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2-1)(p^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{p-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{p+1}$$

и $f(t) = \dfrac{1}{2}\sin t + \dfrac{1}{4}e^t + \dfrac{1}{4}e^{-t}$.