1 Комплексное евклидово пространство

Наряду с действительным может быть введено и комплексное евклидово пространство (т. е. комплексное линейное пространство со скаляр-скалярным произведением в нем). В комплексном пространстве скалярное произведение определим как комплекснозначную функцию двух векторов, удовлетворяющую следующим условиям:

а) $(x,y)=\overline{(y,x)}$ (в частности, (x,x) – вещественное число);

б) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$ для любого комплексного числа λ;

в) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$;

г) $(x,x)\geqslant 0$, причем $(x,x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$.

Из условий а) и б) следует, что $(x,\lambda y)=\overline{(\lambda y,x)}=\overline{\lambda(y,x)}=\overline{\lambda}(x,y)$.

Пример 1. Комплексное евклидово пространство n измерений $\mathbb{C}^n$. Скалярное произведение элементов $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ определяется формулой

$$(x,y)=x_1\bar{y}_1+\ldots+x_n\bar{y}_n.$$

Пример 2. Пространство $C_2[a,b]$ комплекснозначных непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ со скалярным произведением

$$(f,g)=\int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Свойства 1)–3) скалярного произведения очевидны. Четвертое свойство является следствием непрерывности рассматриваемых функций. Действительно, если

$$\|f\|^2=\int\limits_a^b |f(t)|^2\,dt,$$

то $\|f(t)\|\equiv 0$ именно благодаря своей непрерывности.

В комплексном евклидовом пространстве длина (норма) вектора определяется, формулой

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}.$$

Понятие угла между векторами в комплексном случае обычно не вводят, однако понятие ортогональности сохраняется.

Определение 1. Векторы x и y называются *ортогональными*, если $(x,y)=0$.

Определение 2. Система векторов $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ называется *ортогональной*, если векторы системы, отвечающие различным значениям индекса n, попарно ортогональны.

Определение 3. Система векторов $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ называется *ортонормированной*, если если для любых индексов i, j выполняется соотношение

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Пример 3. Наиболее часто используется система экспонент с мнимым показателем

$$\left\{\varphi_k=Ae^{ik\frac{2\pi}{T}t};\quad k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Докажем сначала, что набор функций является ортогональным на отрезке $[a,a+T]$ при любом $a\in\mathbb{R}$ и найдем амплитуду A, при которой он становится ортонормированным.

$$(\varphi_n,\varphi_m)=\int\limits_a^{a+T}A^2e^{i(n-m)\frac{2\pi}{T}t}\,dt=\frac{A^2}{i(n-m)\frac{2\pi}{T}}e^{i(n-m)\frac{2\pi}{T}t}\Bigg|_a^{a+T}=$$

$$=\frac{A^2}{i(n-m)\frac{2\pi}{T}}(e^{i(n-m)\frac{2\pi}{T}(a+T)}-e^{i(n-m)\frac{2\pi}{T}a})=$$

$$=\frac{A^2}{i(n-m)\frac{2\pi}{T}}e^{i(n-m)\frac{2\pi}{T}a}(e^{i(n-m)2\pi}-1).$$

При $n\neq m$, т. к. $e^{i(n-m)2\pi}=e^0=1$,

$$(\varphi_n,\varphi_m)=0.$$

При $n=m$

$$(\varphi_n,\varphi_m)=A^2T.$$

Если выбрать $A^2T=1$, т. е. $A=\frac{1}{\sqrt{T}}$, то получим ортонормированный набор.

Пусть в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве E задана произвольная ортонормированная система элементов $\{\varphi_k\}$. Рассмотрим какой угодно элемент x пространства E.

Определение 4. Назовем *рядом Фурье* элемента x по ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$ ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \tag{1}$$

в котором через c_k обозначены постоянные числа, называемые *коэффициентами Фурье* элемента x и определяемые равенствами

$$c_k = (x, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Числа $c_k = \dfrac{(x, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$ называются коэффициентами Фурье вектора x в ортогональной системе $\{\varphi_k\}$.

Теперь найдем коэффициенты разложения некоторой периодической с периодом T функции $x(t)$ по ортонормированному базису

$$\left\{ \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\frac{2\pi}{T}kt}; \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \tag{2}$$

В этой нормированной системе ряд Фурье имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{c}_k \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\frac{2\pi k}{T}t},$$

а коэффициенты Фурье определяются формулами

$$\hat{c}_n = (x(t), \varphi_n(t)) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\, dt.$$

Обратим внимание на то, что по традиции, в связи с простотой записи в ней ряда Фурье, рассматривают вместо по существу дела значительно более естественной ортонормированной системы — ортогональную систему экспонент $\{e^{ik\frac{2\pi}{T}t}; \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

Итак, если сигнал $x(t)$ имеет период T, то его можно представить в виде бесконечной суммы

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t},$$

где

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\, dt.$$

Данное разложение называется рядом Фурье в комплексной форме.

Отметим, что коэффициенты Фурье T-периодической функции $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ по указанным системам не зависят от того, раскладывается ли функция в ряд Фурье на отрезке $[0,T]$ или на любом ином отрезке вида $[a,a+T]$.

Лемма 1. *Пусть $f(t)$ – непрерывная комплекснозначная периодическая функция с периодом T. Тогда, для любого $a \in \mathbb{R}$*

$$\int\limits_a^{a+T} f(t)\,dt = \int\limits_0^T f(t)\,dt$$

В силу аддитивности интеграла

$$\int\limits_a^{a+T} f(t)\,dt = \int\limits_a^0 f(t)\,dt + \int\limits_0^T f(t)\,dt + \int\limits_T^{a+T} f(t)\,dt.$$

Полагая в последнем интеграле правой части $t = s+T$ и принимая во внимание, что $f(s+T) = f(s)$, убеждаемся, что этот интеграл равен

$$-\int\limits_a^0 f(s)\,ds,$$

откуда и следует лемма.

Естественно назвать конечную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k. \tag{3}$$

n-й частичной суммой ряда Фурье (1).

Выясним стремится ли последовательность его частичных сумм (в смысле метрики пространства E) к какому-либо пределу, и если он сходится, то совпадает ли его сумма с исходным элементом E.

Рассмотрим предварительно следующую задачу: при заданном n подобрать коэффициенты α_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ так, чтобы расстояние между x и суммой

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

было минимальным. Вычислим это расстояние.

$$\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\|^2=\left(x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i, x-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j\right)=$$
$$=\|x\|^2-\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha}_j(x,\varphi_j)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\varphi_i,x)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\overline{\alpha}_j(\varphi_i,\varphi_j)=$$
$$=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha}_i c_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{c}_i+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2,$$

где $c_i=(x,\varphi_i)$. Из последнего равенства получаем

$$\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-c_i|^2. \qquad (4)$$

Ясно, что минимум этого выражения достигается тогда, когда последнее слагаемое равно 0, т. е. при

$$\alpha_i=c_i, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

В этом случае

$$\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2. \qquad (5)$$

Так как всегда $\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\|^2\geqslant 0$, то из равенства (5) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n}c_i^2\leqslant\|x\|^2.$$

Здесь n произвольно, а правая часть не зависит от n; следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2$, сходится и

$$\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2\leqslant\|x\|^2. \qquad (6)$$

Это неравенство называется *неравенством Бесселя*. Геометрически оно означает, что сумма квадратов проекций вектора x на взаимно ортогональные направления не превосходит квадрата длины самого вектора x.

Важен тот случай, когда ортонормированная система такова, что неравенство (6) обращается в равенство (*равенство Парсеваля*)

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \|x\|^2.$$

Введем следующее важное понятие.

Ортогональная нормированная система $\{\varphi_n\}$ называется *замкнутой*, если для любого x справедливо равенство Парсеваля.

Из тождества (5) следует, что замкнутость системы $\{\varphi_n\}$ равносильна тому, что для каждого x частичные суммы ряда Фурье $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i$ сходятся к x.

Понятие замкнутости ортогональной нормированной системы тесно связано с понятием полноты системы.

Система $\{\varphi_k\}$ называется *полной*, если не существует вектора отличной от нуля и ортогональной ко всем элементам системы $\{\varphi_k\}$, т. е. для любого вектора ψ с условием $(\psi, \varphi_k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $(\psi, \psi) = 0$.

В теории вероятностей часто применяется *система Радемахера*

$$\varphi_n(x) = \varphi(2^n x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\varphi(t) = \operatorname{sgn}(\sin 2\pi t)$.

Легко проверяется, что эта система ортонормирована на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$. Эта система не полна.

Это следует хотя бы из того, что, например, функция

$$\varphi_{12} = \varphi_1\varphi_2 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 < x < 1/4 \quad \text{или} \quad 3/4 < x < 1, \\ -1, & \text{если} \quad 1/4 < x < 3/4, \end{cases}$$

ортогональна ко всем функциям системы $\{\varphi_n\}$. Однако последнюю можно расширить до полной ортонормальной системы, добавив к ней функции вида

$$\varphi_{m_1 m_2 \ldots m_k} = \varphi_{m_1}\varphi_{m_2}\ldots\varphi_{m_k} \quad 0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_k.$$

Очевидно, что расширенная таким образом система, называемая системой Радемахера – Уолша, останется ортонормальной. Кроме того, она уже будет полной.

Положим, что ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ замкнута, и покажем, что при этом не существует непрерывной функции (кроме равной тождественно нулю), которая была бы ортогональна по всем функциям семейства $\{\varphi_k\}$. Действительно, пусть $x(t)$ такая функция:

$$(x, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

т. е. все коэффициенты Фурье c_k функции $x(t)$ равны нулю. При этом из уравнения замкнутости $\{\varphi_k\}$ следует, что

$$\|x\| = 0,$$

и из этого равенства, поскольку $x(t)$ предположена непрерывной, следует, что $x(t) \equiv 0$. Обратное утверждение не имеет места, т. е. из того факта, что нет непрерывной функции (кроме тождественного нуля), ортогональной ко всем функциям системы $\{\varphi_k\}$, не следует, что эта система замкнута.

В заключение заметим, что для того, чтобы любая полная ортонормированная система функций в линейном пространстве со скалярным произведением была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы пространство было полным относительно нормы, определяемой этим скалярным произведением. Другими словами, оно должно быть гильбертовым пространством.

2 Тригонометрический ряд Фурье

Если допустить линейные комбинации с комплексными коэффициентами, то в силу формул Эйлера $e^{i\frac{2\pi k}{T}t} = \cos\frac{2\pi k}{T}t + i\sin\frac{2\pi k}{T}t$, $\cos\frac{2\pi k}{T}t = \dfrac{1}{2}(e^{i\frac{2\pi k}{T}t} + e^{-i\frac{2\pi k}{T}t})$, $\sin\frac{2\pi k}{T}t = \dfrac{1}{2i}(e^{i\frac{2\pi k}{T}t} - e^{-i\frac{2\pi k}{T}t})$ окажется, что рассмотренные системы линейно выражаются друг через друга, т. е. алгебраически эквивалентны. Таким образом, система экспонент (2) эквивалентна тригонометрической системе

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{T}},\ \frac{1}{\sqrt{T}}\cos\frac{2\pi k}{T}t,\ \frac{1}{\sqrt{T}}\sin\frac{2\pi k}{T}t, \quad k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Важно заметить, что если $x(t)$ — действительная функция, то числа c_k и c_{-k} хотя вообще и комплексны, но взаимно сопряжены:

$$c_{-k} = \bar{c}_k.$$

Преобразуем ряд Фурье функции $x(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t},$$

где

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\,dt. \tag{7}$$

Перепишем разложение в виде

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} + c_{-k}e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}), \tag{8}$$

Определим отдельно:

$$\begin{gathered}
c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} + c_{-k}e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} = \\
c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} + \bar{c}_k e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} = c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} + \overline{c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t}} = \\
2\operatorname{Re}(c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t}) = 2\left(\operatorname{Re}c_k \cos\frac{2\pi k}{T}t - \operatorname{Im}c_k \sin\frac{2\pi k}{T}t\right) = \\
a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t,
\end{gathered}$$

где $a_k = 2\operatorname{Re}c_k$, $b_k = -2\operatorname{Im}c_k$, и, следовательно, на основании (7)

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt, \quad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos\frac{2\pi k}{T}t\,dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin\frac{2\pi k}{T}t\,dt,$$

где k — целое положительное число.

Подставляя в ряд (8), получим

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t\right).$$

Переход от вещественной формы к комплексной осуществляется пересчетом коэффициентов по формулам:

$$c_0 = a_0,$$
$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2},$$
$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

3 Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке.

В связи с применением рядов Фурье к задачам математической физики и другим вопросам будет существенно установить условия, гарантирующие сходимость ряда Фурье к x не только в среднем, но и в данной точке, всюду, или даже равномерно.

Со сходимостью в среднеквадратичном дела обстоят намного лучше. Например, если функция x интегрируема и интеграл

$$\int_0^T |x(t)|^2\,dt$$

существует как несобственный с конечным числом особенностей, то ряд Фурье функции x сходится к ней в среднеквадратичном. Принципиальным здесь является тот факт, что любую такую функцию с любой степенью точности можно в среднеквадратичном аппроксимировать непрерывной функцией.

Может все-таки вызвать некоторый интерес следующий вопрос. Пусть функция гладкая, за исключением нескольких точек (на периоде), где она имеет скачки. Как ведет себя ряд Фурье в точках разрыва? (В среднеквадратичном ряд, конечно, сходится). Имеет место следующая теорема

Теорема 1. *Пусть x — ограниченная функция с периодом T, имеющая разрывы лишь первого рода, и пусть x имеет в каждой точке левую и* *правую производные*[1]*. Тогда ее ряд Фурье сходится всюду, а его сумма равна* $x(t)$ *в точках непрерывности и равна* $\frac{1}{2}(x(t+0)+x(t-0))$ *в точках разрыва.*

Выше мы сформулировали некоторые достаточные условия сходимости ряда Фурье функции x в точке t. Класс функций, удовлетворяющих этим условиям, достаточно широк. Однако приведенные условия далеки от необходимых. Например, даже непрерывность функции не является необходимой для представления ее в виде суммы ряда Фурье. Правда, ситуация несколько изменится, если интересоваться условиями равномерной сходимости ряда Фурье. Ведь, согласно общим свойствам равномерно сходящихся рядов непрерывных функций, если функция x имеет хотя бы один разрыв, то ее ряд Фурье не может сходиться к ней равномерно. Поэтому непрерывность функции является необходимым условием равномерной сходимости ее ряда Фурье (но, не достаточным).

4 Преобразование Фурье

Разложение периодической функции (сигнала) в сумму простых гармонических колебаний называют гармоническим анализом функции x. Числа $\{c_k, k \in \mathbb{Z}\}$ или $\{a_0, a_k, b_k, k \in \mathbb{Z}\}$ называют спектром функции (сигнала) x. Периодическая функция, таким образом, имеет дискретный спектр. Попытаемся сейчас перенести этот результат на функции непериодические. Прикинем (на эвристическом уровне), что произойдет с разложением в ряд Фурье при неограниченном увеличении периода T сигнала x.

Пусть функция $x(t)$ ограниченна, имеет разрывы лишь первого рода, и пусть x имеет в каждой точке левую и правую производные и сверх того абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, \infty)$, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt.$$

[1]В точке разрыва первого рода левая и правая производные понимаются как

$$x'_{-}(t) = \lim_{h\to+0} \frac{x(t-h)-x(t-0)}{h}, \text{ и } x'_{+}(t) = \lim_{h\to+0} \frac{x(t+h)-x(t+0)}{h}.$$

соответственно.

Полагая для упрощения записи $T = 2\pi l$, перепишем разложение

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k}{l}t},$$

в следующем виде:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k l e^{i\frac{k}{l}t} \frac{1}{l},$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi l} \int\limits_{-\pi l}^{\pi l} f(t) e^{-i\frac{k}{l}t}\, dt.$$

Обозначим через α_k величину $\dfrac{k}{l}$, и пусть

$$c(\alpha_k) = \int\limits_{-\pi l}^{\pi l} x(t) e^{-i\alpha_k t}\, dt.$$

Тогда функция $x(t)$ представляется в следующем виде

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(\alpha_k) e^{i\alpha_k t} \Delta\alpha_k.$$

Последняя сумма представляет собой формальную бесконечную интегральную сумму Римана для интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) e^{i\alpha t}\, d\alpha, \tag{9}$$

где

$$c(\alpha) = \int\limits_{-\pi l}^{\pi l} x(t) e^{-i\alpha t}\, dt.$$

Если в интеграле (9) формально перейти к пределу при $l \to \infty$, то получается повторный несобственный интеграл вида

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i\alpha\tau}\, dt \right) d\alpha. \tag{10}$$

Это и есть искомое представление.

В точках разрыва непрерывности, если таковые имеются, надо только заменить $x(t)$ на $\frac{1}{2}(x(t+0)+x(t-0))$.

Мы получили равенство (10), называемое *формулой Фурье*, с помощью формального предельного перехода. Можно было бы обосновать справедливость этого перехода (при сделанных выше предположениях о функции x).

Интегральную формулу Фурье можно расчленить на два равенства. Таким образом, введем

Определение 5. Функция

$$\mathscr{F}\{x(t)\} \equiv X(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{11}$$

называется преобразованием Фурье функции $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Интеграл здесь понимается в смысле главного значения и считается, что он существует.

Далее, справедлива формула выражающая x через ее преобразование Фурье, называется формулой обращения для преобразования Фурье

$$\mathscr{F}^{-1}\{X(\omega)\} \equiv x(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega,$$

которая называется формулой обратного преобразования Фурье.

Функцию $X(\omega)$, определенную равенством (11) и играющую роль коэффициента в интеграле (10), подобного коэффициентам Фурье в ряде Фурье, естественно считать спектром функции (сигнала) x. В отличие от рассмотренного выше случая периодического сигнала и соответствующего ему дискретного спектра, спектр $X(\omega)$ произвольного сигнала может не обращаться в нуль на целых промежутках и даже на всей прямой (непрерывный спектр).

4.1 Свойства преобразования Фурье

Линейность. Образ линейной комбинации сигналов есть линейная комбинация (с теми же коэффициентами) образов каждого сигнала в отдельности:

$$\mathscr{F}[\alpha x(t)+\beta y(t)] = \alpha\mathscr{F}[x(t)]+\beta\mathscr{F}[y(t)]$$

(следует из линейности интеграла).

Спектр смещенного сигнала.

$$\mathscr{F}\{x(t-\tau)\} = e^{-i\omega\tau}\mathscr{F}\{x(t)\}.$$

Делая в интеграле

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)e^{-i\omega t}\,dt$$

замену переменных $t-\tau=\xi$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\xi)e^{-i\omega(\xi+\tau)}\,d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\xi)e^{-i\omega\xi}e^{-i\omega\tau}\,d\xi = e^{-i\omega\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\xi)e^{-i\omega\xi}\,d\xi.$$

Смещение спектральных характеристик.

$$\mathscr{F}\{e^{\pm i\Omega t}x(t)\} = X(\omega\mp\Omega).$$

$$X(\omega+\Omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i(\omega+\Omega)t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega t}x(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

Спектр свертки. Спектр свертки двух сигналов равен произведению спектров данных сигналов.

$$\mathscr{F}\{x(t)*y(t)\} = \mathscr{F}\{x(t)\}\cdot\mathscr{F}\{y(t)\}.$$

Меняя порядок интегрирования

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t-\xi)y(\xi)\,d\xi\right)e^{-i\omega t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(\xi)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t-\xi)e^{-i\omega t}\,dt\right)d\xi =$$

и производя замену переменного $t-\xi=\tau$ получим

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-i\omega(\tau+\xi)}\,d\tau\right)d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(\xi)e^{-i\omega\xi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right)d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(\xi)e^{-i\omega\xi}\,d\xi\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

Спектр произведения. Спектр произведения сигналов равен свертке спектров исходных сигналов, деленных на 2π.

$$\mathscr{F}\{x(t)\cdot y(t)\} = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\{x(t)\} * \mathscr{F}\{y(t)\}.$$

Формула Релея. Связь между скалярным произведением сигналов и их спектром.

$$(x,y) = \frac{1}{2\pi}(X(\omega),Y(\omega)).$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\overline{y(t)}\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t}\,dt\,d\omega} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{Y(\omega)}\,d\omega,$$

причем изменение порядка интегрирования здесь законно, поскольку функция $X(\omega)\overline{y(t)}e^{i\omega t}$ абсолютно интегрируема в плоскости .

4.2 Сигнал с прямоугольным спектром

Линии связи имеют конечную полосу пропускания, поэтому спектр принимаемого сигнала всегда ограничен.

Рассмотрим сигнал с прямоугольным спектром.

$$S(\omega) = S_m(\theta(\omega+\Omega) - \theta(\omega-\Omega)) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \omega < \Omega, \\ S_m & \text{при} \quad \Omega \leqslant \omega \leqslant \Omega, \\ 0 & \text{при} \quad \omega > \Omega. \end{cases}$$

Найдем сигнал, для этого вычислим обратное преобразование Фурье.

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_m e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Omega}^{\Omega} S_m e^{i\omega t}\,d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{S_m}{it}\,e^{i\omega t}\Big|_{-\Omega}^{\Omega} = \frac{1}{2\pi}\frac{S_m}{it}(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) = \\ &= \frac{S_m\Omega}{\pi}\frac{\sin\Omega t}{\Omega t} = \frac{S_m\Omega}{\pi}\operatorname{sinc}\Omega t, \end{aligned}$$

где $\operatorname{sinc} x = \dfrac{\sin x}{x}$. Заметим, что амплитуда прямо пропорциональна Ω.

4.3 Базис Котельникова

Докажем ортогональность сигналов, сдвинутых относительно друг друга на $t_0 = \dfrac{\pi}{\Omega}k$, $(k = \pm 1, \ldots)$. Рассмотрим два сигнала $x(t) = A\,\mathrm{sinc}(\Omega t)$, $y(t) = A\,\mathrm{sinc}(\Omega(t - t_0))$. Поскольку $y(t) = x(t - t_0)$, то спектр сдвинутого сигнала

$$Y(\omega) = e^{-i\omega t_0} X(\omega).$$

По формуле Релея

$$\begin{aligned}(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{Y(\omega)}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A\pi}{\Omega}\right)^2 e^{i\omega t_0}\,d\omega = \frac{A^2\pi}{\Omega}\,\mathrm{sinc}\,\Omega t_0.\end{aligned}$$

Таким образом, $(x,y) = 0$ при $\Omega t_0 = \pi k$ $(k = \pm 1, \ldots)$. Минимальный сдвиг, при котором x и y ортогональны, равен $t_0 = \pm\pi/\Omega = \pm 1/(2F)$, где $F = \Omega/2\pi$ — ширина спектра (Гц).

Теперь докажем, что набор функций

$$c_k(t) = A\,\mathrm{sinc}(\Omega t - \pi k), \quad k = \pm 1, \ldots,$$

является базисом в пространстве сигналов, спектр которых ограничен отрезком $[-\Omega, \Omega]$. Докажем ортогональность

$$(c_m, c_n) = 0, \quad m \neq n.$$

Используя свойство преобразования Фурье задержанного сигнала и формулу Релея имеем

$$\begin{aligned}(c_m, c_n) &= \frac{1}{2\pi}(\mathscr{F}\{c_m\}, \mathscr{F}\{c_n\}) = \\ &= (e^{-i\omega\frac{\pi}{\Omega}m}\mathscr{F}\{c_0\}, e^{-i\omega\frac{\pi}{\Omega}n}\mathscr{F}\{c_0\}) \\ &= \frac{A^2\pi}{\omega}\,\mathrm{sinc}(\pi(m - n)) = 0\end{aligned}$$

при $m \neq n$.

Теперь найдем нормировку $(c_n, c_n) = 1$

$$(c_n, c_n) = \frac{A^2\pi}{\omega}.$$

Следовательно, $\frac{A^2\pi}{\omega} = 1$, откуда $A = \sqrt{\Omega/\pi}$.

Таким образом система

$$c_k(t) = \sqrt{\frac{\Omega}{\pi}}\,\mathrm{sinc}(\Omega t - \pi k).$$

является ортонормированной.

Тогда обобщённый ряд Фурье для сигнала

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k c_k(t),$$

где

$$\alpha_k = (x(t), c_k(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} X(\omega)\overline{C_k(\omega)}\,d\omega.$$

Т. к.

$$C_k(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{\Omega}}e^{-i\omega k\pi/\Omega} & \text{при} \quad |\omega| \leqslant \Omega, \\ \\ 0 & \text{при} \quad |\omega| > \Omega, \end{cases}$$

то

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\Omega}}\int_{-\Omega}^{\Omega} X(\omega)e^{i\omega k\pi/\Omega}\,d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}}x(\pi/\Omega k) = \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}}x(k/2F).$$

Тогда ряд можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\pi/\Omega k)\,\mathrm{sinc}(\Omega t - \pi k).$$

Итак, мы получили разложение сигнала по базису Котельникова.

Теорема 2 (В.А. Котельников)**.** *Если $x(t)$ – сигнал, спектр которого ограничен частотами $|\omega| \leqslant \Omega$, то он может быть разложен в ряд.*

Таким образом, если известны отсчеты сигнала, взятые через равные промежутки времени $1/2F = \pi/\Omega$ (с частотой Котельникова–Найквиста), и спектр сигнала не содержит частот выше Ω, то сигнал может быть полностью восстановлен, т. е. по формуле могут быть получены значения сигнала во все остальные моменты времени. Заметим, что для моментов времени $t_k = \pi k/\Omega$ ряд чисто формален — все слагаемые, кроме одного, равны нулю. Если известно, сколько времени занимает передача одного отсчетного значения сообщения $x(t)$ в данном канале связи, то легко оценить количество таких сообщений, которые можно параллельно передавать по этому каналу связи. Иными словами, появляется возможность оценить пропускную способность канала связи (более того, еще и в зависимости от информационной насыщенности сообщений, которая сказывается на спектре сигнала $x(t)$).

4.4 Влияние ограничения сигнала по времени на его спектр

Предположим, что обработки сигнала $x(t)$ использованы результаты его наблюдения в течение ограниченного промежутка времени длинны T. Вычислим спектр такого сигнала и сравним его со спектром исходного. Ограничение сигнала по времени эквивалентно умножению его на функцию окна

$$w(t) = \theta(t - t_0) - \theta(t - t_0 - T).$$

Поскольку, спектр произведения сигналов равен свертке спектров исходных сигналов, деленной на 2π:

$$\mathscr{F}\{w(t)x(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W(\xi)X(\omega - \xi)\,d\xi.$$

Спектральная плотность функции окна

$$\mathscr{F}\{w(t)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{i\omega}\,e^{-i\omega t}\Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega t_0} - e^{-i\omega(t_0+T)}) =$$

$$= \frac{1}{i\omega}e^{-i\omega(t_0+\frac{T}{2})}(e^{i\omega\frac{T}{2}} - e^{-i\omega\frac{T}{2}}) = Te^{-i\omega(t_0+\frac{T}{2})}\,\mathrm{sinc}(\omega T/2).$$

Тогда спектр ограниченного по времени сигнала

$$\mathscr{F}\{w(t)x(t)\} = \frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(t_0+\frac{T}{2})}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{T}{2}\xi\right)X(\omega - \xi)\,d\xi.$$

Если переместить начало отсчета времени в центр окна

$$\mathscr{F}\{w(t)x(t)\} = \frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2}\xi\right) X(\omega-\xi)\,d\xi = \frac{T}{2\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2}\omega\right) * X(\omega).$$

Как следует из полученного результата, спектр исходного сигнала «сворачивается» с функцией $\operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2}\omega\right)$, основной «колокол» которой сосредоточен в интервале $(-\frac{2\pi}{T}, \frac{2\pi}{T})$.

Таким образом, при ограничении сигнала по времени его спектр «размывается», его «неровности» сглаживаются, усредняясь на интервале времени длиной $\approx \frac{4\pi}{T}$. Из принципа дуальности времени и частоты можно заключить, что при ограничении спектра по частоте аналогично искажается сам сигнал.

5 Обобщенные функции.

6 Пространство основных функций

Определение 6. Функции $\varphi(x)$, которые непрерывно дифференцируемы любое количество раз, $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, и финитны, т.е. $\varphi(x) \equiv 0$ вне некоторого интервала $[a,b]$, будем называть основными (пробными). Множество таких функций назовем основным пространством.

Функции образуют линейное пространство (с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа).

Такие функции заведомо существуют: например,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x| \geqslant a, \\ e^{-\dfrac{a^2}{a^2-x^2}} & \text{при} \quad |x| < a. \end{cases}$$

Определение 7. Обобщенными функциями назовем линейные непрерывные функционалы, заданные на пространстве основных функций. Число, сопоставляемое основной функции $\varphi(x)$ функционалом f, обозначаем как (f,φ).

Заметим, прежде всего, что всякая интегрируемая на любом конечном интервале функция $f(x)$ порождает некоторую обобщенную функцию. Действительно, выражение

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

есть непрерывный линейный функционал. Такие обобщенные функции мы в дальнейшем будем называть регулярными, а все остальные, т. е. не представимые в виде, – сингулярными.

δ-функция:

$$T(\varphi) = \varphi(0)$$

Этот функционал обычно записывают в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx$$

понимая по $\delta(x)$ “функцию”, равную нулю при всех $x \neq 0$ и обращающуюся в точке $x = 0$ в бесконечность так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

Смещенная δ-функция.

$$T(\varphi) = \varphi(a).$$

Этот функционал естественно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)\,dx.$$

Действия над обобщенными функциями. Для обобщенных функций, т. е. непрерывных линейных функционалов на пространстве основных функций, определены операции сложения и умножения на числа. При этом. очевидно, для регулярных обобщенных функций (т. е. «обычных» функций на прямой) сложение их как обобщенных функций (т. е. линейных функционалов) совпадает с обычной операцией сложения функций. То же самое относится и к умножению на числа.

Определение 8. Сложение: $(f_1+f_2,\varphi)=(f_1,\varphi)+(f_2,\varphi)$; Умножение на число: $(\alpha f,\varphi)=(f,\alpha\varphi)$

Определим теперь для обобщенных функций операцию дифференцирования и рассмотрим ее свойства. Пусть сначала T – функционал на пространстве основных функций, определяемый некоторой непрерывно дифференцируемой функцией f:

$$T(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

Его производной естественно назвать функционал dT/dx, определяемый формулой (интегрируя по частям и учитывая, что основная функция φ обращается в нуль вне некоторого конечного интервала)

$$\frac{dT(\varphi)}{dx}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx=-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

Определение 9. Производной dT/dx обобщенной функции T называется функционал, определяемый формулой

$$\frac{dT}{dx}(\varphi)=-T(\varphi')$$

Пример 4. Пусть

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Эта функция, называемая функцией Хевисайда, определяет линейный функционал

$$(\theta,\varphi)=\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(x)\,dx$$

В соответствии с определением производной обобщенной функции имеем

$$(\theta',\varphi)=-(\theta,\varphi')=-\int\limits_{0}^{\infty}\varphi'(x)\,dx=\varphi(0)$$

(поскольку φ обращается в 0 на бесконечности). Таким образом, производная функции Хевисайда есть δ-функция.

7 $\mathcal{Z}$-преобразование

Одним из наиболее полезных методов представления последовательностей и работы с ними является $\mathcal{Z}$-преобразование. Для последовательности x_n оно определяется следующим образом:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \equiv \mathcal{Z}\{x_n\}, \tag{12}$$

где z – комплексная переменная. Преобразование имеет смысл для тех значений комплексной переменной z, при которых ряд сходится.

Пример 5. Найти $\mathcal{Z}$-преобразование единичного импульса. Поскольку $x_n = 0$ при любых n, за исключением $n = 0$, где $x_n = 1$. Эта последовательность обозначается также:

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = 0, \\ 0 & \text{при} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Выполнив ее $\mathcal{Z}$-преобразование, получим:

$$X(z) = 1.$$

Пример 6. Найти $\mathcal{Z}$-преобразование единичного скачка. Поскольку $x_n = 1$, то

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots = \frac{1}{1 - z^{-1}},$$

причем $X(z)$ сходится при $|z| > 1$.

Пример 7. Найти $\mathcal{Z}$-преобразование последовательности

$$x_n = a^n, \quad n \geqslant 0.$$

Подставив x_n в (12), получим

$$X(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \ldots = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$X(z)$ сходится при $|z| > a$.

Пример 8. Определить $\mathcal{Z}$-преобразование последовательности $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{-n}$. Рассмотрим, сначала, функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-k}}.$$

очевидно, что $\frac{df(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} -nz^{-n-1} = -z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$. Таким образом, $\sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = -z\frac{df(z)}{dz} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$.

7.1 Свойства $\mathcal{Z}$–преобразования

Линейность:

$$\mathcal{Z}\{ax_n + by_n\} = a\mathcal{Z}\{x_n\} + b\mathcal{Z}\{y_n\}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(ax_n + by_n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} ax_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} by_n z^{-n} =$$
$$= a\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} + b\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} = aX(z) + bY(z).$$

Первая теорема смещения:

$$\mathcal{Z}\{x_{n-k}\} = z^{-k}\mathcal{Z}\{x_n\}$$

при условии, что при $n < 0$ принимается $x_n = 0$.

$\mathcal{Z}$–преобразование для задержанной последовательности равно

$$\mathcal{Z}\{x_{n-k}\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n-k} z^{-n}.$$

Положив $m = n - k$, получим равенство

$$\sum_{m=-k}^{\infty} x_m z^{-(m+k)} = z^{-k}\sum_{m=-k}^{\infty} x_m z^{-m},$$

которое может быть переписано следующим образом:

$$\mathcal{Z}\{x_{n-k}\} = z^{-k}\left[x_{-k}z^{k} + \ldots + x_{-1}z + \sum_{m=0}^{\infty} x_m z^{-m}\right] =$$
$$= z^{-k}X(z) + x_{-k} + \ldots + x_{-1}z^{-(k-1)} = z^{-k}X(z).$$

Необходимо отметить что, вообще говоря, необходимо учесть значения последовательности x_n при $n < 0$, т. е. важную роль начинают играть начальные условия.

Вторая теорема смещения:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = z(X(z) - x_0)\\
&\mathcal{Z}\{x_{n+2}\} = z^2(X(z) - x_0 - x_1 z^{-1})\\
&\mathcal{Z}\{x_{n+3}\} = z^3(X(z) - x_0 - x_1 z^{-1} - x_2 z^{-2})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathcal{Z}\{x_{n+k}\} = z^k\left(\mathcal{Z}\{x_n\} - x_0 - x_1 z^{-1} - \ldots - x_{k-1}z^{-(k-1)}\right).
\end{aligned}$$

Свертка: $\mathcal{Z}$-преобразование дискретной свертки двух последовательностей равно произведению $\mathcal{Z}$-преобразований этих последовательностей.

Рассмотрим две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. $\mathcal{Z}$-преобразование числовой свертки этих последовательностей

$$x_n * y_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_{n-k}$$

имеет вид

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(x_n * y_n)z^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{n-k} z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x_k y_{n-k} z^{-n} =\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty} y_{n-k} z^{-(n-k)} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} Y(z)\\
&= Y(z)\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = Y(z)X(z).
\end{aligned}$$

Здесь мы снова воспользовались тем, что $y_k = 0$ при $k < 0$. Итак,

$$\mathcal{Z}\{x_n * y_n\} = \mathcal{Z}\{x_n\}\mathcal{Z}\{y_n\}.$$

7.2 Обратное $\mathcal{Z}$-преобразование

Весьма важно уметь перейти не только от последовательности к ее $\mathcal{Z}$-преобразованию, но и, обратно, от $\mathcal{Z}$-преобразования к последовательности. Способ обратного перехода называется обратным $\mathcal{Z}$-преобразованием и формально определяется соотношением

$$x_n = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C X(z)z^{n-1}\,dz, \tag{13}$$

где C — замкнутый контур, охватывающий все особенности функции $X(z)z^{n-1}$.

Обратное $\mathcal{Z}$-преобразование можно найти несколькими способами: прямым вычислением интеграла (13) с использованием теоремы о вычетах; разложением $X(z)$ на простые дроби.

Первый способ основан на известной теореме из теории функций комплексного переменного, утверждающей, что контурный интеграл (13) может быть вычислен непосредственно через вычеты:

$$x_n = \sum_i \operatorname*{res}_{z_i} X(z)z^{n-1}.$$

Если преобразование представляет собой дробно-рациональную функцию, обратное преобразование производится методом разложения на элементарные дроби с последующим почленным обращением с помощью таблицы преобразований.

Для практического использования аппарата $\mathcal{Z}$-преобразования существуют специальные таблицы, позволяющие определять прямые и обратные $\mathcal{Z}$-преобразования.

Таблица $\mathcal{Z}$-преобразований

№ п/п.	x_n	$X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$
1	1	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
2	$(-1)^n$	$\dfrac{1}{1+z^{-1}}$
3	a^n	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$
4	n	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
5	n^2	$\dfrac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$

Пример 9. Пусть $X(z) = \dfrac{z^{-2}}{(1-0{,}5z^{-1})(1-0{,}25z^{-1})}$. Учитывая, что при $n=0$ полюсы $z^{n-1}X(z)$ имеют значения $z_1=0,\ z_2=0{,}5,\ z_3=0{,}25$, а при $n \geqslant 1$ — $z_1=0{,}5,\ z_2=0{,}25$, получаем

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n=0 \\ 4\cdot 0{,}25^{n-1}(2^{n-1}-1) & \text{при} \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

Пример 10. Разложение $X(z)$ на простые дроби.

$$X(z) = \frac{11 - z^{-1} - z^{-2}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}.$$

Можно разложить $X(z)$ на простые дроби:

$$X(z) = 6 + \frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

С учетом того, что каждое слагаемое имеет обратное $\mathcal{Z}$-преобразование, получим

$$x_n = 6\delta_n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \begin{cases} 11 & \text{при} \quad n=0 \\ 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \text{при} \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$